

SOKSZÖGEK ÉS KÖRÖK

ELMÉLET

Konvex sokszögek tulajdonságai:

Az n oldalú **konvex sokszög** egy csúcsából induló átlóinak száma $n - 3$.

Az n oldalú **konvex sokszög** átlóinak száma $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

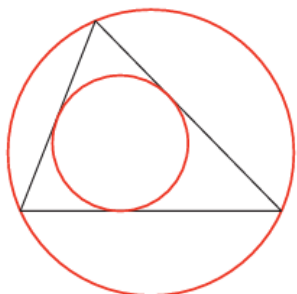
ELMÉLET

Konvex sokszögek általános tulajdonságai:

Az n oldalú **konvex sokszög** **belső szögeinek összege** $(n - 2) \cdot 180^\circ$, **külső szögeinek összege** 360° .

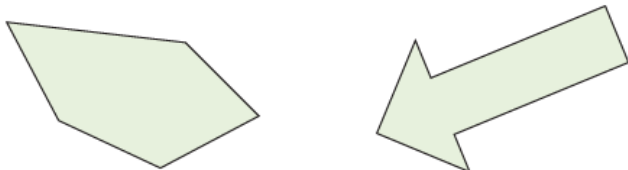
A konkáv sokszögek is felbonthatók háromszögekre, de nem minden esetben egy csúcsból induló átlókkal. Belátható, hogy az n oldalú sokszögeket átlók segítségével $n - 2$ darab háromszögre lehet bontani, ezért a konkáv sokszög **belső szögeinek összege** is $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Korábban láttuk, hogy minden háromszögnek van **körülírt és beírt köre**.

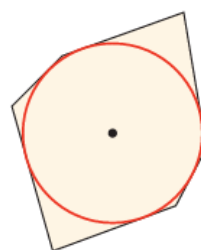


Vizsgáljuk meg a négyszögeknek és más sokszögeknek a körrel való viszonyát!

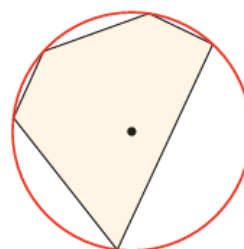
Könnyen látható, hogy ez a tulajdonság, amellyel minden háromszög rendelkezik, nem teljesül minden sokszög esetében. Vannak olyan sokszögek, amelyeknek sem beírt, sem körülírt körük nincs.



Vannak olyan sokszögek, amelyeknek csak beírt vagy csak körülírt körük van.

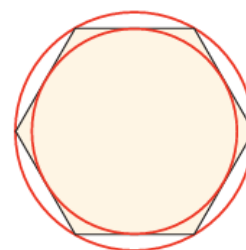
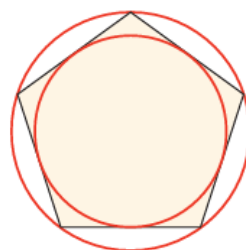


csak beírt
köre van



csak körülírt
köre van

Vannak olyan sokszögek, melyeknek van beírt és körülírt körük is.

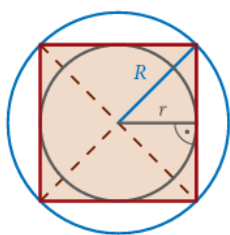


ELMÉLET

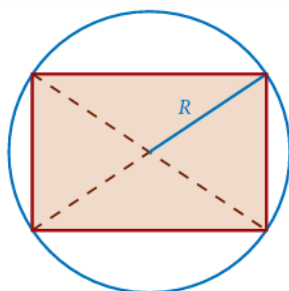
A síkban egy konvex **sokszögnek** van **beírható köre**, ha létezik a síknak olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a sokszög minden oldalától. Ez a távolság a beírható kör sugara. (Ebben az esetben a sokszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, a sokszög oldalegyenesei a kör érintői.)

A síkban egy konvex **sokszögnek** van **körülírható köre**, ha létezik a síknak olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a sokszög minden csúcsától. Ez a távolság a körülírható kör sugara. (Ebben az esetben a sokszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, a sokszög oldalai a kör húrvai.)

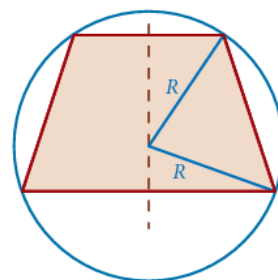
A rajzokon r a négyszögbe írt kör sugarát, R a négyszög körülírt körének sugarát jelenti.



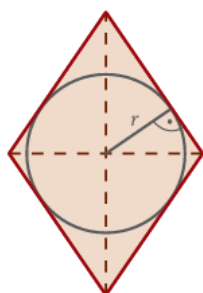
négyzet



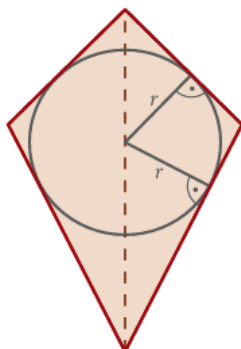
téglalap



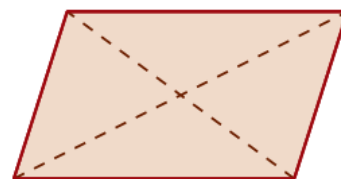
egyenlő szárú trapéz (húrtrapéz)



rombusz



konvex deltoid



paralelogramma

Speciális négyszögek esetén:

	beírt köre	a beírt kör középpontja	körülírt köre	a körülírt kör középpontja
négyzet	van	az átlók metszéspontja	van	az átlók metszéspontja
téglalap	általában nincs, speciális esetben van (négyzet)	–	van	az átlók metszéspontja
rombusz	van	az átlók metszéspontja	általában nincs, speciális esetben van (négyzet)	–
paralelogramma	általában nincs, speciális esetben van (rombusz)	–	általában nincs, speciális esetben van (téglalap)	–
egyenlő szárú trapéz (húrtrapéz)	általában nincs, speciális esetben van (ha a szemközti oldalak hosszának összege egyenlő)	–	van	a szimmetriatengely egy pontja
konvex deltoid	van	a szimmetriatengely egy pontja	általában nincs, speciális esetben van (ha a szemközti szögek összege 180°)	–

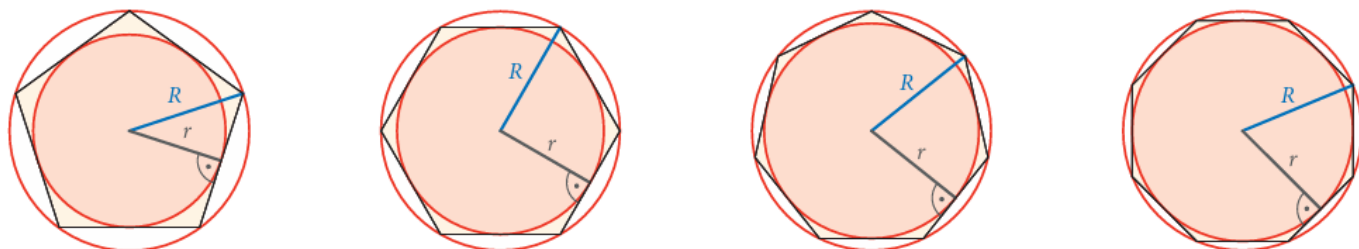
ELMÉLET

Az n oldalú szabályos sokszög tulajdonságai (ahol $n \in \mathbb{N}$; $3 \leq n$):
Minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő nagyságú.

Egy belső szögének nagysága $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Kerülete $K = n \cdot a$, ahol a a sokszög oldalának hosszát jelöli.

Van beírható és körülírható köre.



Bármely n oldalú szabályos sokszög felbontható n darab egybevágó, egyenlő szárú háromszögre. Egy ilyen háromszög alapja a sokszög oldala (a), az alaphoz tartozó magasság pedig a sokszög beírható körének sugara (r).

Ha az egyenlő szárú háromszög területét T_Δ jelöli, akkor az n oldalú **szabályos sokszög területe**

$$T = n \cdot T_\Delta = n \cdot \frac{a \cdot r}{2}.$$



Egy geometriai programmal tetszőleges n -re rajzoljunk szabályos sokszögeket!

RÁADÁS

Tétel: Minden érintősokszög területe kiszámítható úgy, hogy a sokszög kerületének a felét (s) megszorozzuk a beírt kör sugarával, r -rel: $t = rs$.

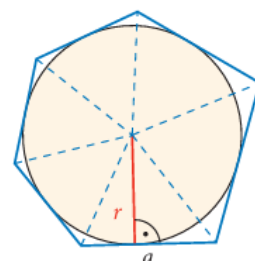
Bizonyítás

Ha a kör középpontját összekötjük a sokszög csúcaival, akkor a sokszög olyan háromszögekre bomlik, amelyek egyik oldala a sokszögnek is oldala, és az ezekhez tartozó magasság éppen r .

Egy ilyen háromszög területe: $\frac{a \cdot r}{2}$, azaz az oldalhosszúság $\frac{r}{2}$ -szerese.

Az összes háromszög területének összege pedig az oldalhosszúságok összegének (vagyis a sokszög kerületének) $\frac{r}{2}$ -szerese. Ha a sokszög területét t -vel és a kerületét $2s$ -sel jelöljük (hiszen a félkerület s), akkor

$$t = 2s \cdot \frac{r}{2} = rs.$$



FELADATOK

1. Határozd meg a 7 cm oldalhosszúságú négyzetből kivágható legnagyobb sugarú kör kerületét és területét!

Megoldás:

Ha egy négyzetből a lehető legnagyobb kört vágjuk ki, a kör átmérője (d) pontosan megegyezik a négyzet oldalhosszával (a).

Adatok:

$$a = 7 \text{ cm}$$

$$\rightarrow d = 7 \text{ cm}$$

$$\rightarrow r = 3,5 \text{ cm}$$

Kerület:

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi = 7 \cdot \pi \approx \mathbf{21,99 \text{ cm}}$$

Terület:

$$T = r^2 \cdot \pi = 3,5^2 \cdot \pi \approx \mathbf{38,48 \text{ cm}^2}$$

2. Mekkora a rombuszba írt körnek a sugara, ha a rombusz átlóinak hossza 10 cm és 24 cm?

Megoldás:

Itt egy kis derékszögű háromszögelésre lesz szükségünk.

A rombusz átlói (e=10, f=24) merőlegesen felezik egymást, így 4 darab egybevágó derékszögű háromszöget alkotnak.

A háromszög oldalai:

- Befogók: $e/2 = 5 \text{ cm}$ és $f/2 = 12 \text{ cm}$.
- A rombusz oldala (a): Pitagorasz-tétellel:

$$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = \mathbf{13 \text{ cm}}$$

A kör sugara (r): A beírt kör sugara pontosan a kis derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága. Ezt a területképletből kapjuk meg leggyorsabban.

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{5 \cdot 12}{2} = \mathbf{30 \text{ cm}^2}$$

Ugyanez a terület:

$$\frac{a \cdot r}{2} = \frac{13 \cdot r}{2} = \mathbf{30}$$

$$13 \cdot r = 60 \rightarrow r = \frac{60}{13} \approx \mathbf{4,62 \text{ cm}}$$

3 Egy 4,1 dm átmérőjű körre illeszkedik egy olyan téglalap négy csúcsa, melynek egyik oldala 9 cm hosszúságú. Mennyivel nagyobb a kör területe a téglalap területénél?

Megoldás:

$$4,1 \text{ dm} = 41 \text{ cm}.$$

Ha egy téglalap csúcsai a körön vannak, akkor a téglalap átlója megegyezik a kör átmérőjével (d).

Kör adatai:

- $d = 41 \text{ cm} \rightarrow r = 20,5 \text{ cm}$
- $T_{\text{kör}} = 20,5^2 \cdot \pi \approx 1320,25 \text{ cm}^2$

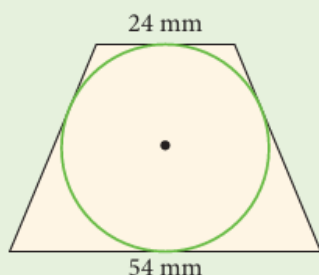
Téglalap adatai:

- Egyik oldal (a) = 9 cm
- Átló (d) = 41 cm
- Másik oldal (b) Pitagorasz-tétellel
 $b = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$
- $T_{\text{téglalap}} = 9 \cdot 40 = 360 \text{ cm}^2$

Különbség:

$$1320,25 - 360 = 960,25 \text{ cm}^2$$

- 4** Egy húrtrapéz alapjainak a hosszúsága 24 mm és 54 mm. A trapéznek mind a négy oldala érinti a zöld kört.



- a) Mekkora a trapéz csúcsaiból a körhöz húzott érintőszakaszok?
- b) Mekkora a trapéz szárai?
- c) Mekkora a trapéz magassága?
- d) Mekkora a zöld kör sugara?

Megoldás:

A kulcs az **érintőszakaszok tétele**, ami kimondja, hogy egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz hossza megegyezik.

Mivel a trapéz szimmetrikus (húrtrapéz), a beírt kör érintési pontjai az alapokat pontosan felezik.

- a) Mekkora a trapéz csúcsaiból a körhöz húzott érintőszakaszok?
A felső alap ($a = 24$ mm) és az alsó alap ($c = 54$ mm) felezőpontjai az érintési pontok.
A felső csúcsokból induló érintőszakaszok a felső alap felével egyenlőek: $24 / 2 = 12$ mm.
Az alsó csúcsokból induló érintőszakaszok az alsó alap felével egyenlőek: $54 / 2 = 27$ mm.
- b) **A trapéz szára két érintőszakaszból áll össze: egy felsőből (ami 12 mm) és egy alsóból (ami 27 mm).**
 $b = 12 + 27 = 39$ mm.

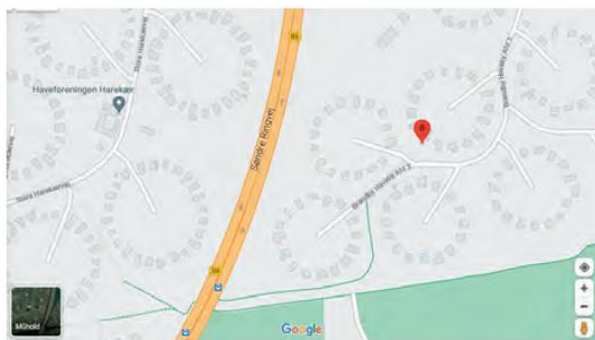
Fontos megjegyzés: Érintőnégyszögeknél a szemközti oldalak összege egyenlő.

$$24 + 54 = 39 + 39 = 78$$

- c) **A trapéz magassága**
Ehhez vágjunk le a trapéz széléről egy derékszögű háromszöget.
A háromszög átfogója a szár: $b = 39$ mm
A háromszög alsó befogója (x) az alapok különbségének a fele: $x = (54 - 24) / 2 = 30 / 2 = 15$ mm
Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk a magasságot (m):
$$m = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296} = 36 \text{ mm}$$
- d) **A beírt kör átmérője (d) pontosan megegyezik a trapéz magasságával (m), hiszen a kör érinti az alsó és felső párhuzamos alapot is.**
 $d = m = 36$ mm
 $\Rightarrow r = 36 / 2 = 18$ mm a beírt kör sugara.

A Google Maps egy ingyenes internetes térképszolgáltatás, melynek segítségével a szobánkból is felfedezhetjük a világot.

Érdekes kép tárul elénk, ha rákeresünk Koppenhága Brondby nevű külvárosára az $55^{\circ}38'10.2''\text{N}$ $12^{\circ}24'11.6''\text{E}$ koordináták segítségével. Ez a külváros olyan „körváros”, melyben egy-egy köríven – a kör sugarától függően – 16, illetve 24 házat építettek fel.



Tegyük fel, hogy az egy-egy ilyen körben lakók szeretnének egymással kommunikálni. Képzeljük el, hogy mindenkinek két lehetőséget biztosítanak a kényelmes, közvetlen kommunikációra. Az egyik lehetőség a tőszomszéddal a „kerítéskapcsolat” (kerítés egyik és másik oldalán állva beszélgethetnek), a másik lehetőség a hálózati kapcsolat, melyet minden, egymással nem tőszomszéd hozhat létre. (A kapcsolatok házanként értendők, függetlenül az egy házban lakók számától. Minden kapcsolathoz két fél szükséges.)

Egy tetszőleges házban lakók hány „kerítéskapcsolatot” és hány hálózati kapcsolatot fognak létrehozni, ha 16 házaspár laknak?

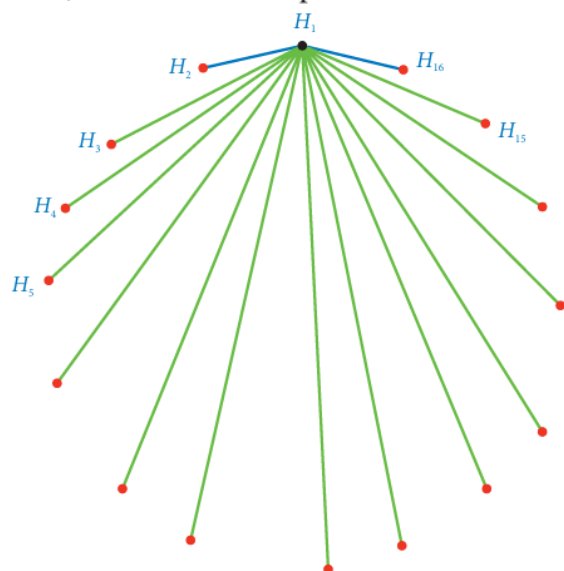
Hány „kerítéskapcsolatot” és hány hálózati kapcsolatot hoznak létre összesen, ha mindenki mindenkivel szeretne közvetlenül kommunikálni a 16 házaspárban? Válaszd meg az előbbi kérdéseket a 24 házaspárra vonatkozóan is! (A házak közötti ívek nem feltétlenül egyenlő hosszúak.)

Megoldás

Mivel minden házhoz két „kerítéskapcsolat” rendelhető, ezért 16 házhoz összesen $16 \cdot 2$ jön létre, de mivel így minden kapcsolatot mindkét fél részéről „beszámítottunk”, ezért az összes „kerítéskapcsolat” száma az előbbi szorzat fele, azaz $\frac{16 \cdot 2}{2} = 16$.

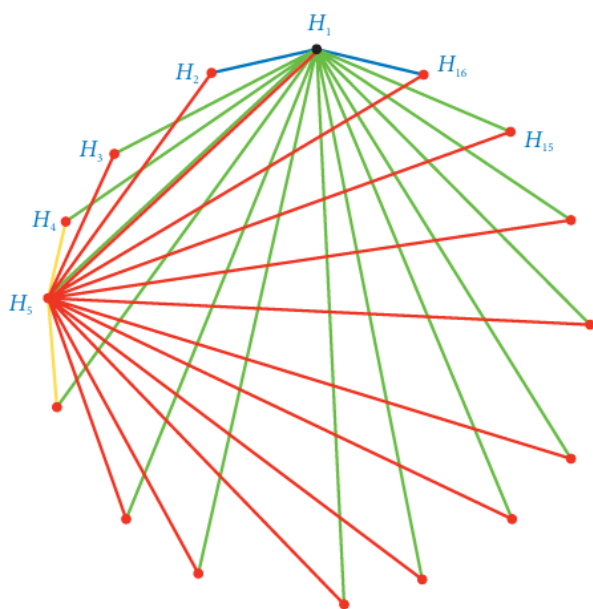
Ugyanerre az eredményre jutunk, ha elindulva pl. a H_1 háztól az óramutató járásával ellentétes irányba (ezt nevezzük pozitív forgásiránynak) rendre összeszámoljuk az egymást követő házak közötti „kerítéskapcsolatot”.

Az 1. ábrán kékkel jelöltük a H_1 tetszőlegesen kiválasztott ház két „kerítéskapcsolatát” és zölddel a hálózati kapcsolatait. Mivel egyik ház sem létesít hálózati kapcsolatot önmagával és két közvetlen szomszédjával (vagyis összesen 3 házzal), ezért hálózati kapcsolatainak száma $16 - 3 = 13$.



1. ábra

A 2. ábra az 1. ábra kiegészítése, melyen jelöltük egy másik, tetszőlegesen kiválasztott (H_5) ház kapcsolatait is. Sárgával a kerítés-, pirossal a hálózati kapcsolatokat.



2. ábra

Mivel minden házhoz 13 hálózati kapcsolat rendelhető, ezért 16 házhoz összesen $16 \cdot 13$ jön létre, de mivel így minden kapcsolatot mindkét fél részéről számoltunk (pl. a H_1 és H_5 közötti zöld és piros kapcsolat), ezért az összes hálózati kapcsolat száma az előbbi szorzat fele, azaz

$$\frac{16 \cdot 13}{2} = 104.$$

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy 24 ház esetén:

- egy ház „kerítéskapcsolatainak” száma 2, hálózati kapcsolatainak száma 21;
- az összes „kerítéskapcsolat” száma 24;
- az összes hálózati kapcsolat száma $\frac{24 \cdot 21}{2} = 252$.

Vegyük észre, hogy az előbbi feladatban egy olyan modellt használhattunk, melyben a házak csúcsokat, a „kerítéskapcsolatok” oldalakat, a hálózati kapcsolatok átlókat jelentenek egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben.

- 2. a)** Határozzuk meg a belső szögek összegét egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben!
- b)** Határozzuk meg a külső szögek összegét egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben!

Megoldás

- a) Ötletet adhat a feladat megoldásához az előbbi külváros képe, ahol a főtérből induló utak közelítőleg háromszögekre bontják a városrészt.

Tekintsük a 16 oldalú sokszög egy belső pontját, kössük ezt össze a sokszög minden csúcsával. Az így keletkező 16 darab háromszög belső szögeinek összege összesen $16 \cdot 180^\circ$.

A sokszög belső szögeinek összegét az ábrán jelölt α_1 ; α_2 ; α_3 ; ...; α_{31} ; α_{32} szögek összege adja.

Mivel a belső szögek összegéhez nem tartozik hozzá az a teljes szög, melynek a kijelölt belső pont a csúcsa, ezért a sokszög belső szögeinek összege

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31} + \alpha_{32} &= 16 \cdot 180^\circ - 360^\circ = \\ &= 16 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (16 - 2) \cdot 180^\circ = \\ &= 14 \cdot 180^\circ = 2520^\circ\end{aligned}$$

Ehhez hasonlóan a 24 oldalú konvex sokszög a belső szögek összege:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{47} + \alpha_{48} &= 24 \cdot 180^\circ - 360^\circ = \\ &= 24 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (24 - 2) \cdot 180^\circ = 3960^\circ\end{aligned}$$

- b) Mivel minden belső szögnek kiegészítő szöge a hozzá tartozó külső szög, ezért összegük 180° .

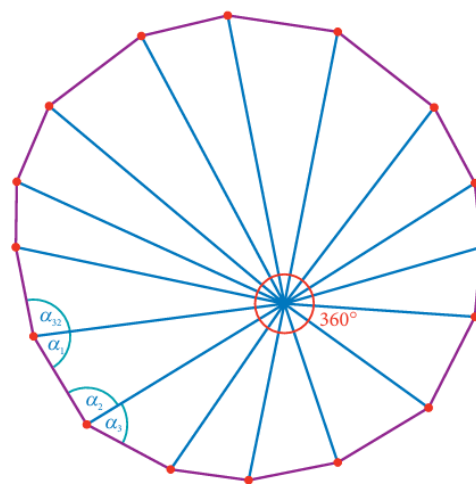
A 16 oldalú konvex sokszögnek 16 darab belső- és külsőszög-párja van, ezek összesen $16 \cdot 180^\circ$ nagyságú szöget hoznak létre. A külső szögek összegét megkapjuk, ha ebből a szögösszegeből levonjuk a belső szögek összegét, így:

$$16 \cdot 180^\circ - 14 \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Ehhez hasonlóan a konvex 24 oldalú sokszögre:

$$24 \cdot 180^\circ - 22 \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Tehát mindkét sokszög külső szögeinek összege 360° .



5  Hány átlója van egy olyan konvex sokszögnek, melyben a belső szögek összege 2160° ?

Megoldás:

1. Lépés: Hány oldalú a sokszög? (n)

Tudjuk, hogy a belső szögek összege

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Állítsuk fel az egyenletet:

$$(n - 2) \cdot 180 = 2160$$

Osszunk el mindkét oldalt 180-nal:

$$n - 2 = \frac{2160}{180}$$

$$n - 2 = 12$$

$$n = 14$$

Tehát egy 14-oldalú sokszögről (tizennégyszögről) van szó.

2. Lépés: Az összes átló számának kiszámítása (d)

Egy n oldalú sokszög összes átlóját az alábbi képlettel kapjuk meg:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

A képlet logikája: minden csúcsból (n) indul $n-3$ átló, de mivel így minden átlót kétszer számoltunk (mindkét végpontjánál), az eredményt el kell osztanunk kettővel.

Behelyettesítve a 14-et:

$$d = \frac{14 \cdot (14 - 3)}{2}$$

$$d = \frac{14 \cdot 11}{2}$$

$$d = 7 \cdot 11 = 77$$

A konvex sokszögnek összesen 77 átlója van.

6  Mennyi a belső szögek összege egy olyan konvex sokszögben, melyben az átlók száma 27?

Megoldás:

1. Lépés: Hány oldala van a sokszögnek? (n)

Az összes átló számának képlete:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

A feladat szerint $d = 27$.

Írjuk fel az egyenletet:

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 27$$

Szorozzunk be 2-vel:

$$n \cdot (n - 3) = 54$$

Ebből n értéke 9

Tehát egy kilencszögről van szó.

2. Lépés: A belső szögek összege (S)

Most, hogy tudjuk, hogy $n = 9$, használhatjuk a már jól ismert belső szögösszeg képletet:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Behelyettesítve:

$$S = (9 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 7 \cdot 180^\circ$$

$$S = 1260^\circ$$

A belső szögek összege a sokszögben 1260° .

7 Egy szabályos hatszög oldala 1 cm hosszú.

- a) Számítsd ki a hatszög területét, továbbá a beírt és a körülírt kör területét is!
b) Hány százaléka a hatszög területének a két kör területének különbsége?

Megoldás:

Adatok: $a = 1$ cm

a) Területek kiszámítása

Egy szabályos hatszög 6 darab a oldalú szabályos háromszögből áll.

Hatszög területe (T_h):

Egy szabályos háromszög magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Egy háromszög területe:

$$t = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

A hatszög területe:

$$T_h = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598 \text{ cm}^2$$

A hatszög területe kb. 2,6 cm²

Körülírt kör területe (T_K):

A sugara (R) megegyezik az oldalával:

$$R = a = 1 \text{ cm}$$

$$T_K = R^2 \cdot \pi = 1^2 \cdot \pi = \pi \approx 3,142 \text{ cm}^2$$

A körülírt kör területe kb. 3,14 cm²

Beírt kör területe (T_B):

A sugara (r) megegyezik a szabályos háromszög magasságával:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$T_B = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi \approx 2,356 \text{ cm}^2$$

A beírt kör területe kb. 2,36 cm²

b) Százalékszámítás

A két kör területének különbsége:

$$\Delta T = T_K - T_B = \pi - 0,75\pi = 0,25\pi \approx 0,7854 \text{ cm}^2$$

A kérdés az, hogy ez hány százaléka a hatszög területének ($T_h \approx 2,598$):

$$\text{Százalék} = \frac{\text{Különbség}}{\text{Hatszög területe}} \cdot 100$$

$$\text{Százalék} = \frac{0,25\pi}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot 100 = \frac{0,5\pi}{3\sqrt{3}} \cdot 100 \approx \frac{1,5708}{5,196} \cdot 100 \approx 30,23\%$$

A különbség a hatszög területének kb. 30,23%-a.

- 1.**  Mekkora a 24 cm területű szabályos
a) háromszög; b) négyszög; c) hatszög
köré írt kör sugara?

Megoldás:

a) **Szabályos háromszög**

A háromszög területe $K = 3a = 24$ cm, tehát az oldalhossz:

$$a = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}$$

A szabályos háromszög köré írt kör sugara az oldalhossz és a $\sqrt{3}$ kapcsolatából adódik:

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 4,62 \text{ cm}$$

b) **Szabályos négyszög (négyzet)**

A négyzet területe $K = 4a = 24$ cm, tehát az oldalhossz:

$$a = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$$

A négyzet köré írt kör sugara pontosan a négyzet átlójának a fele. Az átló $a\sqrt{2}$, így:

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ cm}$$

c) **Szabályos hatszög**

A hatszög területe $K = 6a = 24$ cm, tehát az oldalhossz:

$$a = \frac{24}{6} = 4 \text{ cm}$$

A szabályos hatszög egyik különlegessége, hogy 6 darab egyenlő oldalú háromszögből áll.
Emiatt a köré írt kör sugara **pontosan megegyezik** az oldalhosszával:

$$R = a = 4 \text{ cm}$$

- 2** Egy 8 cm oldalú rombusz egyik szöge 60° -os.
- a) Mekkora a rombusz területe?
 - b) Mekkora a rombusz beírt körének sugara?

Megoldás:

Adatok:

- Oldalhossz (a): **8 cm**
- Szög (α): **60°**

a) **A rombusz területe**

Ha a rombusz egyik szöge 60° , akkor a rövidebb átlója két egyenlő oldalú (szabályos) háromszögre bontja az alakzatot. Minden oldaluk **8 cm**.

1. **Egy szabályos háromszög magassága (m):**

A magasság felezi az alapot (4 cm), így egy derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel számolhatunk:

$$m^2 + 4^2 = 8^2$$

$$m^2 + 16 = 64 \implies m^2 = 48$$

$$m = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \approx \mathbf{6,93 \text{ cm}}$$

2. **Egy háromszög területe (T_h):**

$$T_h = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

3. **A rombusz területe (T):**

Mivel két ilyen háromszögből áll:

$$T = 2 \cdot 16\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \approx \mathbf{55,43 \text{ cm}^2}$$

b) **A rombusz beírt körének sugara**

A beírt kör sugara (r) pont a rombusz magasságának (m) a fele ($r = \frac{m}{2}$).

1. **Előbb számoljuk ki a magasságot:**

A magasságot a területből is megkaphatjuk ($T = a \cdot m$):

$$32\sqrt{3} = 8 \cdot m \implies m = \frac{32\sqrt{3}}{8} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ cm}$$

2. **A sugár meghatározása:**

$$r = \frac{m}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx \mathbf{3,46 \text{ cm}}$$

- 3**  a) Milyen négyszög az a paralelogramma, amelynek van körülírt köre?
- b) Milyen négyszög az a deltoid, amelynek van körülírt köre?
- c) Milyen négyszög az a paralelogramma, amelynek van beírt köre?
- d) Milyen négyszög az a téglalap, amelynek van beírt köre?
- e) Milyen négyszög az a deltoid, amelynek van beírt köre?
- f) Milyen négyszög az a rombusz, amelynek van körülírt köre?

Megoldás:

Körülírt körrel rendelkező négyszögek (Húrnégyszögek)

Feltétel: A szemközti szögek összege 180° .

- a) **Milyen paralelogramma? → Téglalap.**
A paralelogramma szemközti szögei egyenlők. Ahhoz, hogy az összegük 180° legyen, mindegyiknek 90° -osnak kell lennie. Tehát csak a téglalap (és speciális esete, a négyzet) jöhet szóba.
- b) **Milyen deltoid? → Derékszögű deltoid.**
A deltoidnak van két szemközti szöge, ami egyenlő. Ha ezek összege 180° , akkor mindkettő 90° . Ha a szimmetriaátlónál fekvő szögek is összeillenek, akkor körbeírható.
- f) **Milyen rombusz? → Négyzet.**
A rombusz egyben paralelogramma is, így rá is igaz, hogy a szögeinek 90° -osnak kell lenniük. Egy 90° -os szögekkel rendelkező rombusz pedig a négyzet.

Beírt körrel rendelkező négyszögek (Érintőnégyszögek)

Feltétel: A szemközti oldalak hosszának összege egyenlő ($a + c = b + d$).

- c) **Milyen paralelogramma? → Rombusz.**
A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők ($a=c$ és $b=d$).
Az érintőnégyszög feltétele miatt $a+a = b+b$, azaz $2a = 2b$, amiből következik, hogy minden oldal egyenlő. Ez a rombusz.
- d) **Milyen téglalap? → Négyzet.**
A téglalap oldalaira is igaznak kell lennie, hogy $a+a = b+b$, tehát minden oldala egyenlő kell legyen. Ez a négyzet.
- e) **Milyen deltoid? → Mindegyik.**
A deltoid definíció szerint két-két egymás melletti egyenlő oldalból áll (a, a, b, b).
A szemközti oldalak összege itt mindig $a+b$ és $b+a$, tehát minden deltoidnak van beírt köre.
-

4 Egy deltoid két szemközti szöge derékszög. Hosszabb átlója 6 cm, rövidebb átlója 5 cm hosszú. Mekkora a deltoid köré írható kör sugara?

Megoldás:

A megoldás kulcsa: **Thálész tétele**

Melyik szögek derékszögek?

A deltoidnak két szemközti szöge derékszög. Mivel a deltoid szimmetrikus, ez a két derékszög csak a **szimmetriatengelyen kívüli** két csúcsnál lehet (azoknál, amiket a rövidebb átló köt össze).

A hosszabbik átló szerepe:

A hosszabbik átló a deltoid szimmetriaátlója. Ez az átló két egybevágó **derékszögű háromszögre** bontja az alakzatot.

A köré írható kör:

Thálész tétele kimondja, hogy ha egy derékszögű háromszög köré kört írunk, annak az átfogója lesz a kör átmérője. Ebben az esetben a deltoid hosszabbik átlója ($d = 6$ cm) a közös átfogója a két derékszögű háromszögnek.

Számítás

Mivel a hosszabbik átló a köré írt kör **átmérője** (d): $d = 6$ cm

A sugár (R) az átmérő fele:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

5  Mennyi a belső szögek összege abban a sokszögben, melyben egy csúcsból 10 átló indul ki?

Megoldás:

Hány csúcsú a sokszög?

Egy n oldalú sokszögben egy adott csúcsból induló átlók száma mindig $n - 3$.

(Ennek az az oka, hogy egy csúcsból nem húzhatunk átlót önmagához, illetve a két szomszédos csúcshoz, mert azok az oldalak lennének).

A feladat szerint:

$$n - 3 = 10$$

$$n = 13$$

Tehát egy **13-szögről** van szó.
